七乗数の和について

大塚　香代

On Sum of Seventh Powers

KAYO OTUKA

Waring の問題およびそれから派生する種々の問題は古来多くの人々によって研究されてきた．その中「任意の自然数 n は高々何個の k 乗数の和として表わされるであろうか」という，いわゆる $g(k)$ の決定については殆んど完全な解答が得られている．しかし，例えば「k 乗数のみの間の関係」については $k\leqslant 6$ において幾分知られているという程度である．

1934 年 Subba Rao が五乗数及び六乗数の間の関係について考えている．そこでこの拡張として七乗数間の一つの関係を初等的な方法で求めてみた．

K. Subba. Rao に従って次のような記号を用いることにする．

$\sum_{s=1}^{m} x_s{}^k=\sum_{t=1}^{n} y_t{}^k$ であるときには，　　$(m)^k=(n)^k$,

そしてこれが無数組の整数解をもつときには，　　$(m)^k=(n)^k$ *i.o.*,

$\sum_{s=1}^{\alpha} x_s{}^k = \sum_{t=1}^{\beta} y_t{}^k$, $(\alpha>\beta)$, を満足する β の最小数を，　　$\beta=\beta(k)$,

s 個の k 乗数の和　としての n のことなる表現の数を，　　$\gamma'_{ks}(n)$.

定理 1.　$\beta(7)\leqslant 8$.

定理 2.　$r'_{79}(n)\geqslant 2$　（無数に多くの n に対して）．

定理 3.　$(9)^7=(9)^7$ *i.o.*,　$(8)^7=(10)^7$ *i.o.*,　$(7)^7=(11)^7$ *i.o.*

$$(x^7+Ay^7)^7+(x^7-Ay^7)^7-(x^7+By^7)^7-(x^7-By^7)^7-(x^7+Cy^7)^7-(x^7-Cy^7)^7+(x^7)^7+(x^7)^7$$
$$=2\cdot3\cdot7\,(A^2-B^2-C^2)\,x^{35}y^{14}+2\cdot5\cdot7\,(A^4-B^4-C^4)\,x^{21}y^{28}+2\cdot7\,(A^6-B^6-C^6)\,x^7y^{42}.$$

ここで　$A^2=B^2+C^2$　であって同時に　$2\cdot5\cdot7\,(A^4-B^4-C^4)=a^7$　（a は正の整数）となるように A, B, C を決定する．

さて　$A^2=B^2+C^2$　という条件のもとにおいては，次の二つの関係式が得られる。

$2\cdot5\cdot7\,(A^4-B^4-C^4)=2^2\cdot5\cdot7\ B^2C^2$,　$2\cdot7\,(A^6-B^6-C^6)=2\cdot3\cdot7\ A^2B^2C^2$,

そこで　$A^2=B^2+C^2$　と　$2^2\cdot5\cdot7\ B^2C^2=a^7$　との二つの条件から

$$A:B:C=37:35:12,$$
$$A=37\,(2^2\cdot5\cdot7\cdot3^1),\quad B=5\cdot7\,(2^2\cdot5\cdot7\cdot3^3),\quad C=3\cdot2^2\,(2^2\cdot5\cdot7\cdot3^3).$$

とする．（$A^2=B^2+C^2$ を満足する A, B, C の組が無数にある為この A, B, C の組合せはいくらでも考えられる）

このときには，

$2\cdot5\cdot7\,(A^4-B^4-C^4)=(2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7)^7$　となり又　$ABC=2^8\cdot3^{10}\cdot5^4\cdot7^4\cdot37$　となるから

$$2\cdot3\cdot7\ A^2B^2C^2=2^{17}\cdot3^{21}\cdot5^8\cdot7^9\cdot37^2=N$$

とおけば，

$$(x^7+Ay^7)^7+(x^7-Ay^7)^7-(x^7+By^7)^7-(x^7-By^7)^7-(x^7+Cy^7)^7-(x^7-Cy^7)^7+(x^7)^7+(x^7)^7$$
$$=(2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7x^3y^4)^7+Nx^7y^{42}.$$

この式で　$x=y=1$　とおけば,

$$N=(A+1)^7-(A-1)^7-(B+1)^7+(B-1)^7-(C+1)^7+(C-1)^7+1^7+1^7-(2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)^7.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}&(x^7+Ay^7)^7+(x^7-Ay^7)^7-(x^7+By^7)^7-(x^7-By^7)+(x^7+Cy^7)^7-(x^7-Cy^7)^7+(x^7)^7+(x^7)^7\\&=(2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\ x^3y^4)^7+\{(A+1)\,xy^6\}^7-\{(A-1)\,xy^6\}^7-\{(B+1)\,xy^6\}^7+\{(B-1)\,xy^6\}^7-\{(C+1)\,xy^6\}^7+(C-1)\,xy^6\}^7\\&\quad+(xy^6)^7+(xy^6)^7-\{(2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)\,xy^6\}^7.\end{aligned}$$

書き直して,

$$\begin{aligned}&(x^7+Ay^7)^7+(x^7-Ay^7)^7+(x^7)^7+(x^7)^7+\{(A-1)\,xy^6\}^7+\{(B+1)\,xy^6\}^7+\{(C+1)\,xy^6\}^7+(2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\ xy^6)^7\\&=(2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\ x^3y^4)^7+\{(A+1)\,xy^6\}^7+\{B-1)\,xy^6\}^7+\{(C-1)\,xy^6\}^7+(xy^6)^7+(xy^6)^7+(x^7+By^7)^7\\&\quad+(x^7-By^7)^7+(x^7+Cy^7)^7+(x^7-Cy^7)^7.\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここに,

$$\begin{cases}A=37\,(2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7)=139860,\\B=35\,(2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7)=132300,\\C=12\,(2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7)=\ 45360.\end{cases}$$

$x^7>Ay^7$ を満足する $x,\ y$ に対しては, (1)式は定理3の中の　$(8)^7=(10)^7$ *i.o.*　をあたえる. 次に,
$Ay^7>x^7>By^7$ みたす $x,\ y$ に対しては, (1)式はこれを変形することにより　$(7)^7=(11)^7$ *i.o.*　を,
$By^7>x^7>Cy^7$ に対しては元に戻って同様の関係式　$(8)^7=(10)^7$ *i.o.*　を,
$Cy_7>x_7$ に対しては　$(9)^7=(9)^7$ *i.o.*　をあたえる.

この最後の関係式　$(9)^7=(9)^7$ *i.o.* は　定理3と同時に定理2の証明をもあたえるものである.

定理1 は次の実例より得られる. すなわち,

$[9,\ 9,\ 8,\ 2,\ 2,\ 2]^7=[10,\ 7,\ 7,\ 4,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1]^7$,　ここに　$[a_1,\ a_2,\cdots,\ a_l]^7=\sum_{i=1}^{l} a_i{}^7$.

〔例示〕　$5^7<A<6^7$,　$5^7<B<6^7$,　$4^7<C<5^7$

(i)　$(9)^7=(9)^7$　の例　$x=1$　$y=4$　$(+4^7)$

$[390511,\ 4096,\ 4096,\ 139859,\ 132301,\ 45361,\ 1260,\ 28979,\ 7244]^7$
$=[20160,\ 139861,\ 132299,\ 45359,\ 1,\ 1,\ 37171,\ 15436,\ 30869]^7$

(ii)　$(8)^7=(10)^7$　の例

④　$x=6$　$y=1$　$(+6^7)$

$[69966,\ 23346,\ 279936,\ 279936,\ 139859,\ 132301,\ 45361,\ 1260]^7$
$=[45360,\ 139861,\ 132299,\ 45359,\ 1,\ 1,\ 68706,\ 24606,\ 54216,\ 39096]^7$

ⓡ　$x=5$　$y=1$　$(+5^7)$

$[43597,\ 15625,\ 15625,\ 139859,\ 132301,\ 45361,\ 1260,\ 10835]^7$
$=[15750,\ 139861,\ 132299,\ 45359,\ 1,\ 1,\ 42085,\ 24697,\ 6553,\ 12343]^7$

(iii)　$(7)^7=(11)^7$　の例　$x=27$　$y=5$　$(+27^7)$

$[387420489,\ 387420489,\ 792107989,\ 2175296875,\ 2067703125,\ 708765625,\ 1968750]^7$
$=[2185328125,\ 6067171875,\ 708734375,\ 15625,\ 15625,\ 5740875,\ 4607989,\ 770232989,\ 400545489,$
$374295489,\ 1727011]^7$

注意　(i)　$g(7)=143$　は知られているが G(7) の下限はどうか,

ただし G(k) とは「ある数から先のすべての数は G(k) 個の k 乗数又はそれ以下の和である」ことが成立する最小数のことで $g(k)$ よりも基本的な数である.

(ii)　今少し少い項の間で成立つ七乗数の間の関係式は求められないか,

(iii)　Waring の問題の本来にかえっての一般的考察,

等についての研究は今後に残されている.

参考文献

Subba Rao : Jour. London Math. Soc. 9, 172～173 (1934)

(1956年9月受理)